Banque d'épreuves Archimède

CONCOURS 1997

Option : PC

MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Partie I

On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et on l'oriente de telle sorte que sa base canonique (i, j, k) soit orthonormale directe.

Pour $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ on définit la matrice

$$M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

et f_u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M_u dans la base (i, j, k). On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices $M_u, u \in \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{V}$ l'ensemble des endomorphismes $f_u, u \in \mathbb{R}^3$.

A.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{V}$ sont des espaces vectoriels de dimension 3.

2. Soit $u = (a, b, c)$ et $v = (a', b', c')$. Calculer $M_u M_v$ et montrer que $M_u M_v \in \mathcal{M}$.

En déduire que $\mathcal{M}$ est une algèbre. Est-elle commutative?

3. On note $w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$.

i Montrer que w_1 est un vecteur propre commun à tous les f_u.

ii Soit $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à w_1. On note $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$ et $w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i + j - 2k)$. Montrer que (w_2, w_3) est une base orthonormale de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de f_u dans cette base $\mathcal{B}'$.

iii Montrer que $\mathcal{P}$ est stable pour chaque f_u.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f_u soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

B. Soit $\Psi : u \mapsto f_u(u)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et P_m le polynôme $P_m(X) = X^3 - X^2 + m$ où m désigne un paramètre réel.

1. **i** Caractériser les éléments de $U = \Psi^{-1}(i)$.

ii En déduire que M_u est une matrice orthogonale si et seulement si $u \in U$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que P_m admette trois racines réelles (eventuellement confondues).

3. Montrer que pour $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, M_u est la matrice d'une rotation si et seulement si a, b et c sont les racines de P_m avec $m \in [0, 4/27]$.

4. Etudier f_u pour $u = (2/3, 2/3, -1/3)$ et donner ses éléments caractéristiques.

Partie II

A On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = \frac{p(x)}{1-x^3}$ où p désigne une fonction polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.

2. Pour $k = 0, 1, 2$ on note h_k l'application définie sur $]-1,1[$ par $h_k(x) = x^k/(1-x^3)$. Montrer que $\mathcal{B} = (h_0, h_1, h_2)$ est une base de $\mathcal{F}$.

3. On note $\mathcal{F}_1$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ qui admettent une limite finie quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. Montrer que $\mathcal{F}_1$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}$. Quelle est sa dimension? Montrer que les éléments de $\mathcal{F}_1$ peuvent être prolongés par continuité en une fonction C^∞ sur $[-1,1]$.

4. Pour $x \in]-1,1[$ on note $g_0(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{3}}$, $g_1(x) = \frac{1}{(1+x+x^2)\sqrt{2}}$ et $g_2(x) = \frac{1+2x}{(1+x+x^2)\sqrt{6}}$. Montrer que (g_1, g_2) est une base de $\mathcal{F}_1$, que $\mathcal{B}' = (g_0, g_1, g_2)$ est une base de $\mathcal{F}$ et que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est orthogonale.

B On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions développables en série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

1. i Montrer que h_0, h_1, h_2 sont des éléments de $\mathcal{S}$ et donner leur développement en série entière.

   ii Comparer a_{n+3} et a_n.

   iii En déduire que $\mathcal{F}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$ dont le développement en série entière $\sum a_n x^n$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+3} = a_n$.

2. On définit sur $\mathcal{F}$ l'opération:

$$(f|g) = f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + \frac{f''(0)g''(0)}{4}.$$

   Montrer que ceci définit un produit scalaire sur $\mathcal{F}$ et que (h_0, h_1, h_2) et (g_0, g_1, g_2) sont des bases orthonormales de $\mathcal{F}$.

3. Pour $f \in \mathcal{F}$ on définit g_f sur $]-1,1[$ par $g_f(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ si $x \neq 0$ et l'on définit $g_f(0)$ en prolongeant par continuité.

   i Montrer que $g_f \in \mathcal{F}$.

   ii On appelle φ l'application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ qui à f fait correspondre g_f. Montrer que φ est une rotation et préciser son axe et son angle.

iii Soit $f \in \mathcal{F}_1$. Montrer que $\varphi(f) \in \mathcal{F}_1$. Déterminer les limites de $\varphi(g_2)(x)$ et de $\varphi(g_3)(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

C. On considère l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $]-1,1[$ qui vérifient l'equation différentielle

$$(1-x^3)y''' - 9x^2y'' - 18xy' - 6y = 0. \tag{1}$$

1. Chercher les solutions développables en série entière et montrer que ce sont des éléments de $\mathcal{F}$. Les a-t-on tous?

2. On cherche les solutions définies sur $\mathbf{R}$. Pour ceci, si g est solution de (1) sur un intervalle I inclus dans $\mathbf{R} \setminus \{1\}$, déterminer l'équation différentielle d'ordre 3 vérifiée par f, où $f(x) = (1-x^3)g(x)$.

   Déterminer f et déduire les solutions de (1) sur $]-\infty,1[$ et $]1,\infty[$.

   Etudier les prolongements des solutions en 1 et donner toutes les solutions définies sur $\mathbf{R}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail